

# Problèmes à prise d'initiative

## Sixième

### DENOMBREMENT

#### Exercice 1 (en groupe) :

Des élèves se retrouvent dans la cour de récréation et se salent en échangeant tous une poignée de mains. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées dans un groupe de

- a) 3 élèves. b) 4 élèves ? c) 5 élèves ? d) 10 élèves ? 100 élèves ?

#### Exercice 2 (en groupe) :

On considère les chiffres 1, 2, 3 et 4.

Combien y a-t-il de nombres entiers inférieurs à 10 000 s'écrivant uniquement avec ces chiffres ?

#### Exercice 3 (en groupe) :

Je choisis un nombre entier inférieur à 100.

Je multiplie les chiffres de ce nombre, puis les chiffres du résultat trouvé. Je continue cela jusqu'à trouver comme résultat un nombre composé d'un seul chiffre.

Par exemple : Je choisis 27. Je calcule  $2 \times 7$ , j'obtiens 14. Je calcule  $1 \times 4$ , j'obtiens 4. On dit alors que la longueur de la chaîne de 27 est 2.

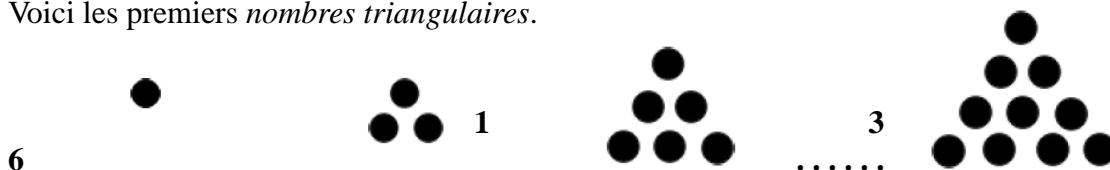
Travail à effectuer : Je sais que le nombre obtenu en bout de chaîne est 6. Trouve le maximum de nombres de départ possibles sachant que la longueur de la chaîne peut être 2, 3 ou 4.

Prolongement possible : Même question avec 8 pour les mêmes longueurs de chaînes.

#### Exercice 4 (individuel ou en groupe) :

On dispose de cinq parfums de glace : citron, vanille, chocolat, fraise, pomme. Détermine le nombre maximum de cornets de glace différents à trois boules.

**Exercice 5 (en groupe) :** Les oies se déplacent en formations triangulaires. Pour ce problème, les oies ont fait des Mathématiques et veillent à ce que chaque formation d'oies corresponde à un *nombre triangulaire*. Voici les premiers *nombres triangulaires*.



1) 8 oies peuvent-elles voler en formation triangulaire ? Justifie.

2) 21 oies peuvent-elles voler en formation triangulaire ? Justifie. Si oui, combien de rangées d'oies comportera ce triangle ?

3) Combien y a-t-il d'oies dans un triangle de 7 rangées d'oies ? Justifie.

4) Combien y a-t-il d'oies dans un triangle de 50 rangées d'oies ? Justifie.

#### **Prolongement**

5)  $n$  désigne le nombre de rangées d'oies dans un triangle. Trouve une formule avec  $n$  qui donne le nombre d'oies dans ce triangle.

6) 5 160 oies peuvent-elles voler en formant un seul triangle ? Justifie.

7) Que remarques-tu si on ajoute deux nombres triangulaires consécutifs ? Justifie.

### ARITHMETIQUE ELEMENTAIRE (4 opérations)

**Exercice 6 (en groupe) :** Comprendre l'algorithme d'AL Kwariszmi de division d'un nombre entier par deux.

L'enseignant dans le film (à trouver sur matharodin.com) effectue un calcul algorithmique au tableau étape après étape par effacement. Question posée aux élèves :

Que fait l'enseignant ?

**Exercice 7 (individuel) :**

Lola s'amuse à plier une feuille de papier. Sachant que la feuille mesure 0,1 mm d'épaisseur, quelle épaisseur devrait trouver Lola si elle pliait la feuille sur elle-même 20 fois de suite ?

**Exercice 8 (en groupe) : MODELISER PAR UNE MULTIPLICATION**

- a. Supposons que tu te brosses les dents deux fois 3 minutes par jour. Supposons (dans cette question uniquement) que tu vives 80 ans, combien de temps auras-tu passé à te brosser les dents au cours de ta vie ? Donne le résultat en jours, heures, minutes. (Fais comme si toutes les années comportaient 365 jours).
- b. Supposons que tu vives 80 ans. Donne un ordre de grandeur du nombre de battements de ton cœur au cours de ta vie.

**Exercice 9 :** Une année martienne est longue de 867 jours terrestres.

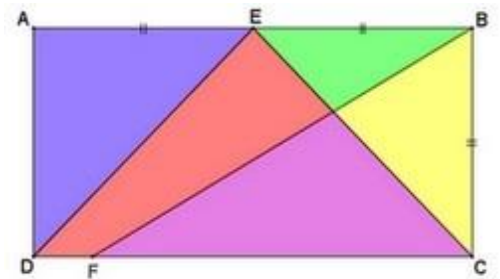
- 1) Calcule ton âge en nombre de jours ?
- 2) Quel âge est ton âge martien ?

**Exercice 10:**

Un aquarium cubique rempli à ras bord avec de l'eau pèse 108 kg. Le même aquarium à moitié plein pèse 57 kg. Quel est le poids de l'aquarium vide ?

**Exercice 11 :**

Combien de pièces de 2 € et de billets de 5 € au minimum faut-il combiner pour obtenir la somme de 23 € ? de 54 € ? de 81 € ?



**Exercice 12 (individuel) :**

- **Version 1 (rapide, question flash)** Un éleveur possède des poules et des vaches. En regardant tous les animaux, il voit 5 têtes et 16 pattes. Combien de vaches et de poules possède l'éleveur ?
- **Version 2 :** idem avec 16 têtes et 44 pattes.

**GEOMETRIE**

**Exercice 13 (en groupe) : PROPRIETES FIGURES USUELLES**

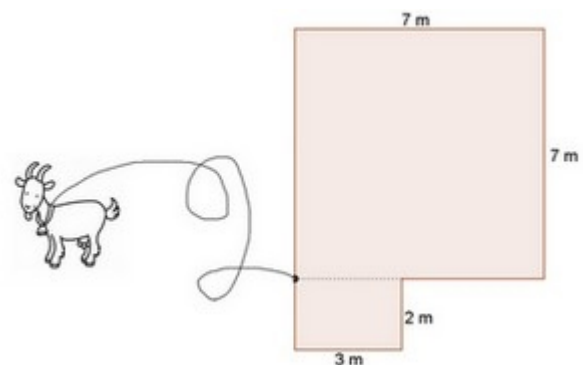
ABCD est un rectangle tel que  $AB = 2 \times BC$ . E est le milieu de [AB] et  $AB = BF$ .

Découper les cinq pièces de ce puzzle de façon à reconstituer un carré, un losange, un parallélogramme, un trapèze et un triangle rectangle et isocèle.

**Exercice 14 (individuel) : La chèvre, TRACER DES ARCS DE CERCLE**

La chèvre de monsieur Seguin est tenue en laisse par une corde de 9 m accrochée par un piquet au bord de la grange comme indiqué sur le schéma.

Après avoir redessiné la grange sur ton petit cahier en prenant pour échelle « 1m correspond à 1cm », représente avec soin la surface sur laquelle la chèvre peut paître.



**Exercice 15 (individuel) La chèvre épisode 2 ! AIRE DE CERCLE**

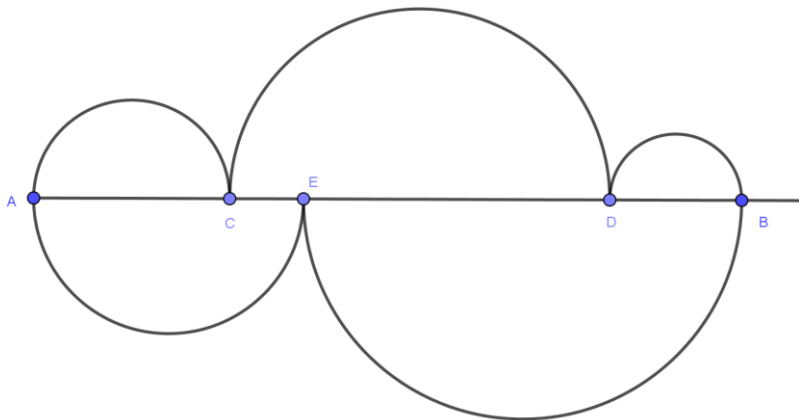
Calcule l'aire de la surface sur laquelle la chèvre peut paître.

**Exercice 16 (en groupe) : PERIMETRE CERCLE, DISTRIBUTIVITE « NUMERIQUE »**

La demi-droite [AB) est une demi-droite graduée d'origine A.

C(3), E(4), D(11) et B(15).

- Pour aller de A à B, est-il plus court de passer par le chemin formé par les demi-cercles au-dessus de la demi-droite [AB) ou ceux en-dessous.
- Peux-tu trouver un autre chemin plus court pour aller de A à B, formé de demi-cercles.



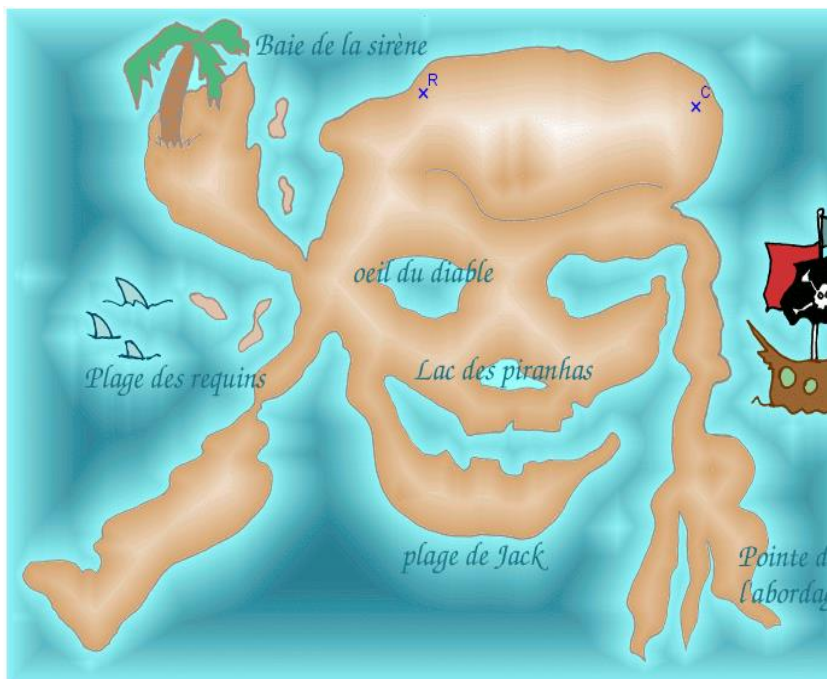
**Exercice 17 (individuel) :** Dans la famille des rectangles ayant un périmètre de 56cm, quel est le rectangle qui a la plus grande aire. On ne prendra en considération que les rectangles ayant pour dimensions des nombres entiers de centimètres.

### Exercice 18 (en groupe) : MEDIATRICE

Sofiane se rend sur une île pour chercher un trésor enfoui 10 mètres sous terre. Il possède une carte au trésor. Aide-le situer le trésor sur la carte, avec un compas et une règle graduée. Au dos de la carte apparaissent les instructions suivantes :

- Place sur la carte la dune des pirates (point D). La dune se situe à 6 km du rocher de la sirène (point R) et à 7,5 km du château hanté (point C) ;
- Le trésor (point T) se trouve à égale distance des points D, R et C. Place-le sur la carte.

**L'île au trésor : 1 cm sur la carte correspond à 1 km dans la réalité.**



## ARITHMETIQUE

### - DIVISION EUCLIDIENNE, Z/7Z, NOMBRES ENTIERS

#### Exercice 19 (individuel) :

M. Carbonnel rencontre des difficultés pour compter. Il préfère donc compter jusqu'à 6, puis recommencer à partir de 0. Compter en Carbonel, cela donne donc : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3...

Ainsi, notre 7 correspond au 0 du système de numération carbonelique, notre 8 à 1, notre 9 à 2, notre 10 à 3 etc.

Les élèves de sixième 3, compréhensifs, font tout pour le comprendre. Ils ont besoin de convertir le 19 en numération carbonelique. Et le nombre 29. Et le nombre 2 017. Aide-les !

**Exercice 20 (en groupe) :** Quel est le 50<sup>ème</sup> chiffre après la virgule du quotient de 100 par 7 ?

**Exercice 21 (individuel) :** Dans une salle de spectacle, il y a 25 rangées de 30 places chacune. Les spectateurs sont placés en complétant les rangées au fur et à mesure de leur arrivée.

- 580 spectateurs ont assisté à la première séance.

- a) Combien de rangées étaient complètes ?
- b) Combien de places libres restait-il dans la salle ?
- 2) 728 spectateurs ont assisté à la deuxième séance. Toutes les rangées étaient-elles occupées ? Justifier la réponse.

**Exercice 22 (en groupe, plus difficile que le précédent) :**

Le conseil municipal d'une ville fait construire une salle de spectacle de 1 050 places. Les 1 050 fauteuils ont été disposés en rangées de 42 places et numérotés de 1 à 1 050. (Le numéro 43 étant derrière le numéro 1 et ainsi de suite).

Or, le jour du premier spectacle, le directeur de la salle s'aperçoit que cette numérotation n'est pas pratique. En effet, si une personne arrive avec le billet 578, il est difficile pour l'ouvreuse de trouver la rangée.

Le directeur décide donc de changer la numérotation :

Tous les billets comporteront une lettre : A pour le premier rang ; B pour le deuxième rang ; etc.

Tous les billets comporteront également un nombre de 1 à 42.

- 1) Expliquer pourquoi le fauteuil numéro C5.
- 2) Trouver le code du fauteuil numéro 500.
- 3) Expliquer pourquoi la famille qui a acheté les places 839, 840, 841, 842 n'est pas groupée.

**Exercice 23 (en groupe) :**

Une année bissextile comporte 366 jours quand une année non bissextile en comporte 365. Une année est bissextile si elle est divisible par 4 mais pas par 100, ou bien si elle est divisible par 400.

**a.** Les années historiques suivantes sont-elles bissextiles ? **800** : couronnement de Charlemagne. **1 492** : Découverte de l'Amérique. **1 789** : Révolution française. **2 000** : L'Inde dépasse le milliard d'habitants.

**b.** Lassana est né le dimanche 27 décembre 1998. Quel est le jour de la semaine de l'anniversaire de ses 7 ans ? *Bien sûr, tu répondras à cette question en tenant compte des années bissextiles.*

**Exercice 24 (individuel) :** Retrouve mathématiquement le jour de ton anniversaire à partir du jour et de la date d'aujourd'hui. Tu feras attention à prendre en compte les années bissextiles.

**Exercice 25 (binôme) : Course à 20... et plus !**

Ce jeu se joue à deux. Celui qui gagne est celui qui arrive le plus vite à 20. Le premier élève dit un nombre entier entre 1 et 3. Le second ajoute 1, 2 ou 3 au nombre du premier. Et ainsi de suite. Le premier qui arrive à 20 a gagné.

- 1)
  - a) Joue à ce jeu quatre fois de suite avec ton voisin. Tu seras deux fois le premier à jouer et deux fois le second.
  - b) Y a-t-il une stratégie gagnante ? Justifie ta réponse.
- 2) Effectue le même jeu sachant que le nombre de départ est 27. Y a-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, quelle est-elle ?

- **MULTIPLES**

**Exercice 26 (en groupe) :** Léna a moins de 100 figurines. Lorsqu'elle les range sur deux lignes avec le même nombre de figurines, il reste une figurine.

- 3) Lorsqu'elle les range sur trois lignes avec le même nombre de figurines, il reste deux figurines.
- 4) Avec quatre lignes, c'est trois, avec cinq lignes, c'est quatre, et enfin avec six lignes, c'est cinq.
- 5) Trouver le nombre de figurines que possède Léna ?

**Exercice 27 (en groupe) : (version 2 en troisième, autres valeurs)**

Dans mon quartier, il y a cinq clubs :

- Celui des handballeurs se réunit tous les quatre jours ;
- Celui des boxeurs se réunit un jour sur trois ;
- Celui des joueurs d'échec se réunit un jour sur deux ;
- Celui des Danseurs se réunit tous les cinq jours ;
- Celui des joueurs de tarot se réunit tous les six jours.

Aujourd'hui, tous les clubs se sont réunis. Dans combien de jours se réuniront ils tous à nouveau ?

*Prolongements :*

a) Si le jour d'aujourd'hui est un mardi, quel sera le jour où tous les clubs se réuniront à nouveau ?

b) Un autre club, le club des musiciens, se réunit un jour sur sept. Si le jour d'aujourd'hui est un mardi, quel sera le jour où tous les clubs se réuniront de nouveau ?

**Exercice 28 :** Deux exoplanètes (planètes qui tournent autour d'une autre étoile que le Soleil) tournent autour de leur étoile E. Aujourd'hui, leur étoile, les deux exoplanètes et notre soleil sont alignés dans l'ordre du schéma. On suppose que le Soleil et l'étoile E sont fixes.

La première exoplanète Exo1 tourne autour de E en 90 jours terrestres. La deuxième exoplanète Exo2 tourne autour de son étoile E en 120 jours terrestres. Dans combien de jours terrestres, leur étoile E, les deux exoplanètes Exo1 et Exo2 et notre soleil seront de nouveau alignés dans l'ordre du schéma ?



**Exercice 29 :** Les deux engrenages sont disposés comme sur le schéma suivant.

Combien faut-il faire de tours au premier engrenage pour que les deux engrenages se retrouvent dans la disposition du schéma (cran n°1 du premier engrenage accolé au cran n°1 du second engrenage) ?

*Pour bien comprendre, n'hésite pas à découper et manipuler les deux engrenages ci-dessous. Cela étant, une justification mathématique est attendue.*

**Exercice 30 (en groupe) :** Les nombres entiers de Sophie Germain pour la journée des droits des femmes.

**LOGIQUE**

**Exercice 31 (en groupe) :**

Tu as trois bougies, la première brûle en 4 minutes, la deuxième en 5 minutes et la troisième en 9 minutes. Comment mesurer 6 minutes en allumant et éteignant les bougies ? On fait l'hypothèse que l'allumage et l'extinction ont lieu sans délai.

**Exercice 32 :** 30 participants à une aventure mangent 30 kg de riz en 30 jours. Quelle quantité de riz mangent 15 participants en 15 jours ?

**Exercice 33 : Niveau 1 (6<sup>e</sup>):** Détermine le dernier chiffre du produit des 1 011 premiers entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

**Niveau 2 (6<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>) :** détermine les six derniers chiffres du produit de 1 011 premiers entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

**Niveau 3 (prolongement ou 3<sup>e</sup>) :** Démontre que le produit des 1 011 premiers entiers consécutifs se terminent par au moins 112 zéros.

**Exercice 34 :** On dispose de 7 petites boîtes identiques. L'une n'a pas le même poids que les autres. En utilisant une balance à plateaux, décrire les pesées à effectuer pour retrouver à tous les coups cette boîte en un nombre minimum de pesées.

**Exercice 35 :** Un berger a plus de 50 moutons mais moins de 70.

Un jour, il remarque, que s'il les compte par 2, il en reste 1 ; que s'il les compte par 3, il en reste 1 ; par 4, il en reste 1 ; par 5, il en reste 1 et par 6, il en reste toujours 1.

Combien a-t-il de moutons ?

## Cinquième

**Exercice 1 (individuel) : LOGIQUE ET CONSERVATION DES LONGUEURS PAR SYMETRIE AXIALE**

Eden part de A, prend de l'eau à la rivière pour la reverser dans son jardin en B. Trace le plus court chemin. Indique ta méthode.



(Source : maths-et-tiques)

**Exercice 2 (en groupe) :** Billard.

**Exercice 3 (en groupe) : Niveau 1 :** Construis un triangle équilatéral  $ABC$  de hauteur  $6\text{ cm}$ . Place un point  $M$  à l'intérieur du triangle et construis ses projetés orthogonaux :  $E, F$  et  $G$  sur les trois côtés du triangle. Mesurer pour évaluer  $ME + MF + MG$ . Recommencer avec d'autres positions de  $M$ .

Que conjectures-tu ? Démontre-le.

**Niveau 2 :** Construis un triangle équilatéral  $ABC$ . Place un point  $M$  à l'intérieur du triangle et construis ses projetés orthogonaux :  $E, F$  et  $G$  sur les trois côtés du triangle.

Mesurer pour évaluer  $ME + MF + MG$ . Recommencer avec d'autres positions de  $M$ .

Que conjectures-tu ? Démontre-le.

**Exercice 4 (en groupe) :**

- Combien de cartes comporte un château de cartes à 3 étages ? à 4 étages ? à 11 étages ?
- Combien de cartes comportent un château de cartes à  $n$  étages ?  $n$  désignant un nombre entier.

**Exercice 5 (individuel) :** Calcule le produit suivant.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

**Exercice 6 :** 1) Un berger a plus de 50 moutons mais moins de 70. Un jour il remarque que s'il les compte par 2, il en reste 1 ; que s'il les compte par 3, il en reste 1 ; par 4, il en reste 1 ; par 5, il en reste 1 et par 6, il en reste toujours 1.

Combien a-t-il de moutons ?

2) Un berger a entre 200 et 500 moutons. Un jour il remarque que s'il les compte par 2, il en reste 1 ; que s'il les compte par 3, il en reste 1 ; par 5, il en reste 1 ; par 6, il en reste 1 ; par 7, il en reste 1.

Combien a-t-il de moutons ?

# Quatrième

## DENOMBREMENT

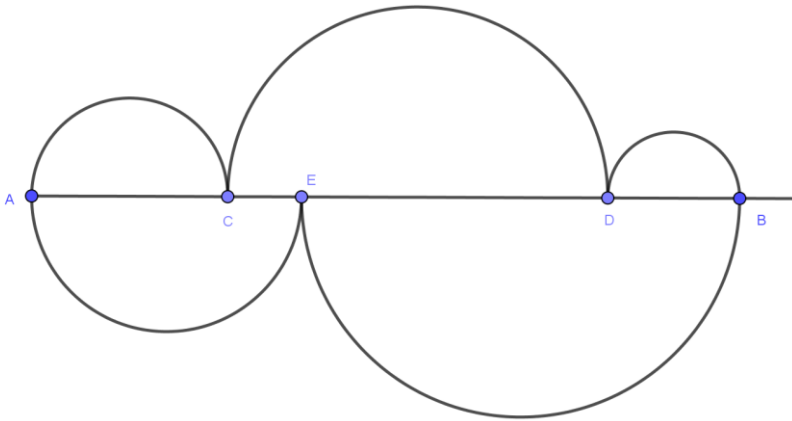
### Exercice 1 (en groupe):

- Construis un polygone à 6 côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
- Combien de diagonales possède un polygone à 7 côtés ?
- Combien de diagonales possède un polygone à 10 côtés ?
- Combien de diagonales possède un polygone à 100 côtés ?
- Combien de diagonales possède un polygone à  $n$  côtés ?

## DEVELOPPEMENT, REDUCTION

### Exercice 2 (en groupe) : PERIMETRE DE CERCLE

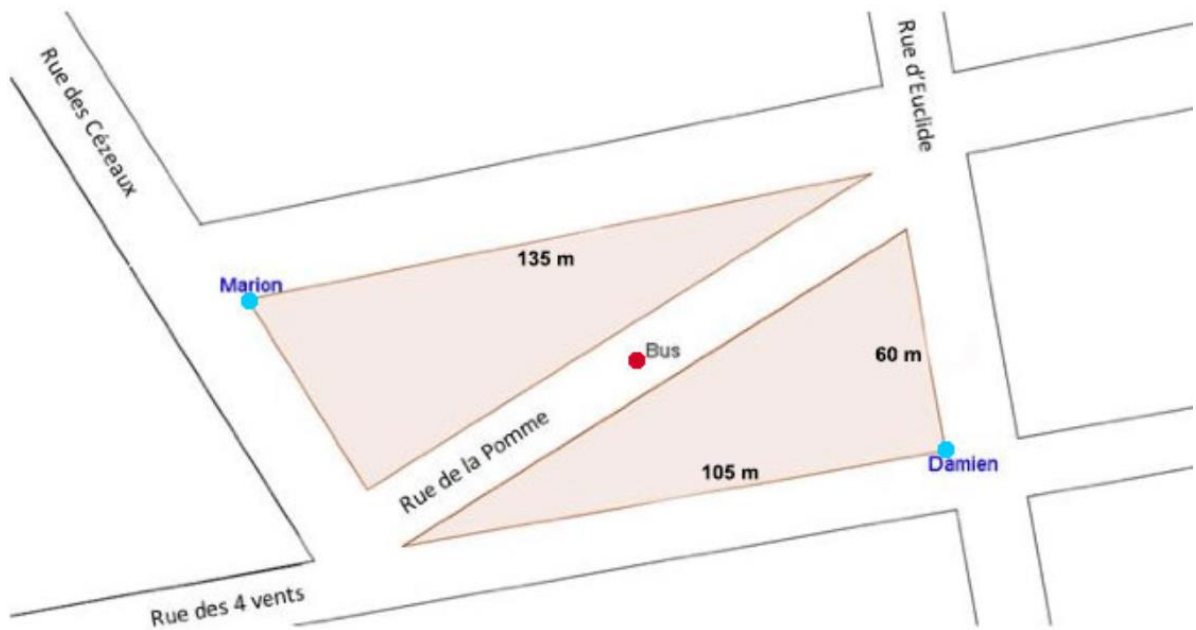
- Pour aller de A à B, est-il plus court de passer par le chemin formé par les demi-cercles au-dessus de la demi-droite [AB) ou ceux en-dessous.
- Peux-tu trouver un autre chemin plus court pour aller de A à B, formé de demi-cercles.



**Exercice 3 (individuel) :** Un enfant propose le problème suivant : « Choisis un nombre. On calcule la somme de ce nombre et de 2 puis le produit de ce résultat par 4. Au résultat, on ajoute le nombre de départ, puis 2, et l'on divise le résultat par 5. Enfin on retranche 2 ». Cet enfant affirme que le résultat est le nombre de départ. Qu'en penses-tu ? Justifie ta réponse.

### Exercice 4

Marion et Damien se rendent à l'arrêt de bus par le plus court trajet.  
Qui de Marion ou de Damien est sur le plus court trajet ?



Irem de la Réunion

## Troisième

### ARITHMETIQUE :

#### Exercice 1 (en groupe) : DIVISION EUCLIDIENNE

- Donne le chiffre des unités de  $17^1, 17^2, 17^3, 17^4, 17^5, 17^6$  et  $17^7$ .
- Quel est le chiffre des unités de  $17^{1500}$  ?

#### Exercice 2 (en binôme) : Course à 20... et plus ! DIVISION EUCLIDIENNE

Ce jeu se joue à deux. Celui qui gagne est celui qui arrive le plus vite à 20. Le premier élève dit un nombre entier entre 1 et 3. Le second ajoute 1, 2 ou 3 au nombre du premier. Et ainsi de suite. Le premier qui arrive à 20 a gagné.

- Joue à ce jeu quatre fois de suite avec ton voisin. Tu seras deux fois le premier à jouer et deux fois le second.
  - Y a-t-il une stratégie gagnante ? Justifie ta réponse.
- Effectue le même jeu sachant que le nombre de départ est 27. Y a-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, quelle est-elle ?
- Tu détailleras la (ou les) stratégie(s) gagnante(s) dans le cas général : le nombre à atteindre est alors désigné par  $n$ . Et chacun peut ajouter au nombre entier de l'autre 1, ... ,  $p$ .  $p$  désigne un entier naturel quelconque.

**Exercice 2 (individuel ou en groupe (demander alors une date non personnelle)) :** Retrouve le jour de ton anniversaire à partir du jour et de la date d'aujourd'hui. Tu feras attention à prendre en compte les années bissextiles.

Tu peux ensuite vérifier ton résultat ensuite grâce à un calendrier.

#### Exercice 3 (en groupe) : DIVISEURS.

Trois cents personnes font la queue devant un bloc de trois cents tiroirs fermés numérotés de 1 à 300.

- La première ouvre tous les tiroirs.
- La deuxième ferme tous les tiroirs qui portent un numéro pair.
- La troisième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 3 :



Si un tel tiroir est ouvert elle le ferme, s'il est fermé elle l'ouvre.

- 4) La quatrième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 4 :  
Si un tel tiroir est ouvert elle le ferme, s'il est fermé elle l'ouvre.
- 5) La cinquième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 5 :  
... Et ainsi de suite jusqu'à la trois-centième personne.
- a) À ce moment-là, le tiroir portant le numéro 12 est-il ouvert ?  
b) Et le tiroir portant le numéro 16 ?  
c) Combien y a-t-il de tiroirs ouverts et quels sont-ils ?

#### Exercice 4 (en groupe) : MULTIPLES

Dans mon quartier, il y a cinq clubs :

- Celui des handballeurs se réunit tous les sept jours ;
- Celui des gamers se réunit un jour sur trois ;
- Celui des joueurs d'échecs se réunit un jour sur deux ;
- Celui des Danseurs se réunit tous les cinq jours ;
- Celui des joueurs de tarot se réunit tous les quatorze jours.

Aujourd'hui, tous les clubs se sont réunis. Dans combien de jours se réuniront ils tous à nouveau ?

#### GEOMETRIE

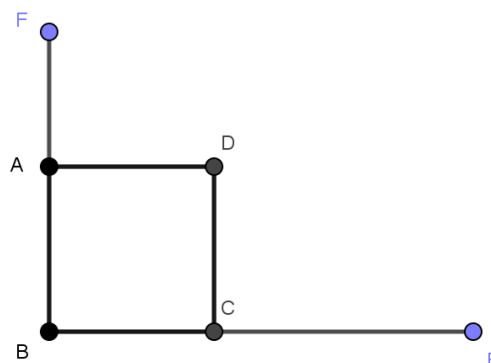
##### Exercice 5 (en groupe) :

$A \in (FB)$  et  $C \in (BE)$ .

$ABCD$  est un carré de longueur de côté  $8\text{ cm}$ .

$DE = 10\text{ cm}$  et  $BF = 12\text{ cm}$ .

Les points  $E, D$  et  $F$  sont-ils alignés ?



##### Exercice 6 (en groupe) : Pythagore et mise en équation.

Deux tours hautes de 30m et de 40m sont distantes de 50m. Un puits est situé entre les deux tours.

Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour ; ils volent à la même vitesse et se posent au même moment sur le puits.

Déterminer la position de ce puits entre les deux tours.

##### Exercice 7 (individuel) : Pythagore et mise en équation

Armoire Ikea ou Margot à la piscine.

**Exercice 8 type seconde : optimisation** d'aire à partir de Thalès notamment. J'en avais, je vous retrouve ça.

**Exercice 9 : Niveau 1** : Détermine les six derniers chiffres du produit de 1 011 premiers entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

**Niveau 2** : Démontre que le produit des 1 011 premiers entiers consécutifs se terminent par 210 zéros.