Réflexions et élaboration de séances autour de démonstrations exemplaires

Des démonstrations en $5^{ème}$ - $4^{ème}$ sur les fractions

MATHÉMATIQUES > Repères annuels de progression pour le cycle 4

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Fractions, nombres rationnels (suite)		
Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient : • $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ • $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ • $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ • $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration. Exemple de calcul fractionnaire permettant de démontrer que $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ On commence par calculer $\frac{2}{3}\times 15$: $\frac{2}{3}\times 15=\frac{2}{3}\times 3\times 5$. La définition du quotient permet de simplifier par 3, puisque $\frac{2}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 2. Donc $\frac{2}{3}\times 15=2\times 5=10$. Par définition du quotient, il vient donc $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$, puisque $\frac{2}{3}$ multiplié par 15 donne 10.	Une ou plusieurs démonstrations de calculs fractionnaires sont présentées. Le recours au calcul littéral vient compléter pour tout ou partie des élèves l'utilisation d'exemples à valeurs génériques.	

Des démonstrations en 5ème - 4ème sur les fractions

MATHÉMATIQUES > Repères annuels de progression pour

NOMBR

Fraction

Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient :

- $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$
- $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration.

Exemple de calcul fractionnaire permettant de démontrer que $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

On commence par calculer $\frac{2}{3} \times 15$:

$\frac{2}{3} \times 15 = \frac{2}{3} \times 3 \times 5$.

La définition du quotient permet de simplifier par 3, puisque $\frac{2}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 2.

Donc $\frac{2}{3} \times 15 = 2 \times 5 = 10$.

Par définition du quotient, il vient donc $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, puisque $\frac{2}{3}$ multiplié par 15 donne 10.

Quelle démonstration de $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$

proposeriez-vous en 5è-4è ?

« *Démontrer que le nombre rationnel* $\frac{1}{3}$ $n'est\ pas\ décimal$ »

Quelle démonstration proposeriez-vous pour une classe de 2^{nde} ?

Pour la suite, travail au choix

A terminer pour séance 2

Travail par groupe de 2 ou 3

Une démonstration en 2$^{\text{nde}}$: sur la notion de nombre non décimal

« *Démontrer que le nombre rationnel* $\frac{1}{3}$ $n'est\ pas\ décimal$ »

1. Proposer au moins un raisonnement et une démonstration pour une classe.

2. En lister les pré-requis.

3. Proposer des activités permettant de réactiver les pré-requis, dont au moins deux figurant dans le document-ressource ci-dessous.

Vous pourrez vous aider de la ressource :

Pistes pour quelques démonstrations du programme

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

D'après le document –Eduscol- RA19 Lycee GT 2 MATH Raisonnement demonstration

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/07/0/RA19_Lycee_GT_2_MATH_Raisonnement_Demonstration_1171070.pdf

- Aller à la page 5 du document.

Une démonstration en $5^{ème}$ - $4^{ème}$ sur les fractions

Choisir l'une des propriétés dont une démonstration au moins est exigée en 5è.

1. En proposer une démonstration pour une classe de 5è ou 4è (à préciser).
2. En lister les pré-requis.
3. Proposer des activités permettant de réactiver les pré-requis, vous pourrez vous appuyer sur les attendus de fin d'année de cycle 3 et 4.

Vous pourrez vous aider de la ressource :

https://disciplines.ac-toulouse.fr/mathematiques/sites/mathematiques.disciplines.ac-toulouse.fr/files/se_former/journees_pedagogiques/journees_pedagogiques_college/jpc_2018/quelques_demonstrations_en_cycle_4_v4docx.pdf

- Pages 1 à 6 du document.

Pour chacune de ces démonstrations,

- quels sont les prérequis attendus du collège ? du lycée ?
- quel vocabulaire est utilisé ?
- quelle définition de nombre décimal (pour 2^{nde}) ou de fraction/nombre rationnel (pour 5è-4è) est utilisée ? Quel registre du nombre est travaillé ? Est ce une aide à la compréhension de nombre décimal ou non décimal ?
- quel est l'intérêt de la démonstration ? (exemplarité ? technicité ? référence ?...), sa fonction (preuve, explication, systématisation,..) ?
- quel est le statut de la démonstration (sa place dans le cours, en exercice, sa faisabilité par les élèves,…), son environnement, sa mise en situation, son niveau ?
- est-il possible de présenter ces démonstrations sous des modalités différentes (élaboration par les élèves, devoir maison,…) ? De demander aux élèves de réinvestir la démarche ? Dans ce cas quelles compétences seront travaillées.

- Vos retours

Pistes pour quelques démonstrations du programme

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Objectifs de formation

- Mettre en place ou revoir le principe du raisonnement par l'absurde.
- Mobiliser la définition d'un nombre décimal : quotient d'un entier par une puissance de dix.

Prérequis, motivation

- Les élèves retrouvent les formes décimales exactes de $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, et $\frac{k}{5}$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Le professeur réactive et précise la définition d'un rationnel, puis celle d'un décimal.
- Les élèves obtiennent des valeurs décimales approchées de rationnels non décimaux avec l'algorithme de la division posée, comme par exemple avec $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{k}{7}$, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Le professeur fait observer qu'un reste partiel répété permet de conclure à la périodicité des décimales, puisqu'alors les quotients et restes partiels suivants vont aussi se répéter.
- La question se pose : « l'affichage de la calculatrice permet-il de conclure ? ». Les cas de $\frac{1}{65\,536}$, qui est décimal mais ne se voit pas dans l'affichage, ou de $\frac{1}{97}$, qui n'est pas décimal mais sans périodicité visible, peuvent alimenter le débat. On peut aussi envisager le cas du décimal 0,12345 12345 12345 12 : comment est-il affiché par la calculatrice ?
- Le professeur peut alors faire observer qu'une périodicité visible des premières décimales ne permet pas de conclure à la périodicité des autres.

Différentes démonstrations possibles

1. Avec l'algorithme de la division posée, les élèves remarquent que le reste 1 se répèt
permet de conclure. En effet, les quotients successifs seront toujours égaux à 3 et l
égaux à 1.
2. Le professeur présente le principe du raisonnement par l'absurde, en guidant plus o
démonstration suivante. On suppose par l'absurde qu'il existe deux entiers A et n te
On en déduit que $10^n = 3A$, donc que 10^n est multiple de 3. La décomposition de 1
premiers fournit alors une contradiction.

Pistes de différenciation

La démonstration 1 est élémentaire et permet de travailler l'écriture décimale, mais ne r
le raisonnement par l'absurde. On peut cependant le faire apparaître en supposant par l'
$\frac{1}{3}$ est décimal et en raisonnant sur le dernier chiffre de son écriture décimale et de son p

Approfondissements possibles

- Étudier la périodicité du développement décimal d'autres rationnels non décimaux.
- Retrouver l'écriture fractionnaire de rationnels à partir d'un développement décimal
- Observer des curiosités, telles que les développements périodiques de $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}$, etc.

> **Compétences transférables**
> Le principe du raisonnement par l'absurde doit être dégagé. Il se retrouve dans une
> démonstration du programme : l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
> Le nombre $\frac{1}{3}$ fournit un exemple de développement décimal illimité, notion offrant u
> celle de nombre réel.