Pistes pour quelques démonstrations du programme

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Objectifs de formation

- Mettre en place ou revoir le principe du raisonnement par l'absurde.
- Mobiliser la définition d'un nombre décimal : quotient d'un entier par une puissance de dix.

Prérequis, motivation

- Les élèves retrouvent les formes décimales exactes de $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, et $\frac{k}{5}$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Le professeur réactive et précise la définition d'un rationnel, puis celle d'un décimal.
- Les élèves obtiennent des valeurs décimales approchées de rationnels non décimaux avec l'algorithme de la division posée, comme par exemple avec $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{k}{7}$, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Le professeur fait observer qu'un reste partiel répété permet de conclure à la périodicité des décimales, puisqu'alors les quotients et restes partiels suivants vont aussi se répéter.
- La question se pose : « l'affichage de la calculatrice permet-il de conclure ? ». Les cas de $\frac{1}{65\,536}$, qui est décimal mais ne se voit pas dans l'affichage, ou de $\frac{1}{97}$, qui n'est pas décimal mais sans périodicité visible, peuvent alimenter le débat. On peut aussi envisager le cas du décimal $0{,}12345\ 12345\ 12345\ 12$: comment est-il affiché par la calculatrice ?
- Le professeur peut alors faire observer qu'une périodicité visible des premières décimales ne permet pas de conclure à la périodicité des autres.

Différentes démonstrations possibles

1. Avec l'algorithme de la division posée, les élèves remarquent que le reste 1 se répète, ce qui permet de conclure. En effet, les quotients successifs seront toujours égaux à 3 et les restes égaux à 1.
2. Le professeur présente le principe du raisonnement par l'absurde, en guidant plus ou moins la démonstration suivante. On suppose par l'absurde qu'il existe deux entiers A et n tels que $\frac{1}{3} = \frac{A}{10^n}$. On en déduit que $10^n = 3A$, donc que 10^n est multiple de 3. La décomposition de 10^n en facteurs premiers fournit alors une contradiction.

Pistes de différenciation

La démonstration 1 est élémentaire et permet de travailler l'écriture décimale, mais ne met pas en jeu le raisonnement par l'absurde. On peut cependant le faire apparaître en supposant par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est décimal et en raisonnant sur le dernier chiffre de son écriture décimale et de son produit par 3.

Approfondissements possibles

- Étudier la périodicité du développement décimal d'autres rationnels non décimaux.
- Retrouver l'écriture fractionnaire de rationnels à partir d'un développement décimal périodique.
- Observer des curiosités, telles que les développements périodiques de $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}$, etc.

> **Compétences transférables**
> Le principe du raisonnement par l'absurde doit être dégagé. Il se retrouve dans une autre démonstration du programme : l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
> Le nombre $\frac{1}{3}$ fournit un exemple de développement décimal illimité, notion offrant une approche de celle de nombre réel.